

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 10

Abgabe: Montag, den 01. Juli 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 10.1

(4 Punkte)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A, B, C, D \in M_{n \times n}(K)$ und A invertierbar.

(a) Nennen Sie eine möglichst allgemeine hinreichende Bedingung sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Beweisen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist Ihre Bedingung aus (a) auch notwendig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Gilt Ihre Bedingung aus (a) auch dann, wenn A nicht invertierbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 10.2

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie über jedem der Körper \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C}

- das charakteristische Polynom von A ,
- die Eigenwerte von A ,
- die Eigenräume von A ,
- die Eigenvektoren von A und
- entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 10.3

(4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ und $f \in K[x]$.

- Sei $c \in K$ ein Eigenwert von T mit Eigenvektor $\alpha \in V$. Zeigen Sie, dass $f(c)$ ein Eigenwert von $f(T)$ ist und bestimmen Sie einen zugehörigen Eigenvektor.
- Sei T diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass $f(T)$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 10.4

(4 Punkte)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit Basis \mathcal{B} und $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

- Zeigen Sie, dass für alle $f \in K[x]$ bereits $[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}})$ gilt.
- Folgern Sie, dass ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom besitzen.

SOMMERFEST MATHEMATIK

Donnerstag 4.7.2024

Fußball ab 16:45 am Sportgelände!

Grillen ab 18:30 Uhr vor F4
Grillgut bitte selbst mitbringen!



Grillbert freut sich auf euch!

Meldet euch schnell für euer Team an:

[www.mathematik.uni-konstanz.de/fachschaft/veranstaltungen/
fussballspiel-und-grillen/](http://www.mathematik.uni-konstanz.de/fachschaft/veranstaltungen/fussballspiel-und-grillen/)

...und solltet ihr nicht die großen Kicker sein, dann schaut doch einfach so zum Grillen vorbei. Eine Anmeldung ist nicht notwendig. Die Fachschaft freut sich auf euch!